Total number of printed pages–16

3 (Sem–5/CBCS) MAT RE 1/RE 2

2021

(Held in 2022)

MATHEMATICS

(Regular Elective)

OPTION–A

Paper : MAT–RE–5016

(Number Theory)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

PART–A

1. Choose the correct option from the following : $1\times10=10$

তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ শুদ্ধ উত্তৰ বাছি উলিওৱা ঃ

(i) If a and b are any two integers, then there exists x and y such that,

যদি a আৰু b দুটা যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেতিয়াহলে তাত x আৰু y দুটা সংখ্যা থাকিব, যাতে

(a) $gcd(a, b) = ax + by$

Contd.

(b) $gcd(a, b) = ax - by$

(c) $gcd(a, b) = ax^n + by^n$

(d) $gcd(a, b) = (ax + by)^n$

(ii) Let m be a positive integer. Two integers a and b are congruent modulo m iff

ধৰা হ'ল m এটা ধনাত্মক সংখ্যা। a আৰু b অখণ্ড সংখ্যা দুটা congruent modulo m হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদিহে

(a) $m \mid (a - b)$

(b) $m \mid (a + b)$

(c) $m \mid (a \times b)$

(d) Both (b) and (c)

[(b) আৰু (c) উভয়ে]

(iii) If (যদি) $a \equiv b \pmod{m}$ and (আৰু) $c \equiv d \pmod{m}$, then (তেতিয়াহলে)

(a) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

(b) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$

(c) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$

(d) All of the above

(ওপৰৰ আটাইবোৰ)

(iv) The RRS modulo 6 contains the set of integers

RRS modulo 6 ত তলৰ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো হ'ব

(a) $\{0, 5\}$

(b) $\{1, 5\}$

(c) $\{1, 2, 3\}$

(d) $\{1, 3, 6\}$

(v) The solution of the linear congruence $2x \equiv 1 \, (mod\, 3)$ is

$2x \equiv 1 \, (mod\, 3)$ ৰৈখিক congruence টোৰ সমাধান হ'ব

(a) $x \equiv 2 \, (mod\, 3)$

(b) $x \equiv 1 \, (mod\, 3)$

(c) $x \equiv 0 \, (mod\, 3)$

(d) None of the above

(ওপৰৰ এটাও নহয়)

(vi) Euler ϕ function of a prime number p, i.e., $\phi(p) = ?$

এটা মৌলিক সংখ্যা p ৰ আইলাৰ ϕ ফলন অৰ্থাৎ $\phi(p) = ?$

(a) p

(b) $p-1$

(c) $\frac{p}{2}-1$

(d) None of the above
(ওপৰৰ এটাও নহয়)

(vii) Which theorem states that 'If p is a prime, then $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$' ?

(a) Dirichlet's theorem

(b) Wilson's theorem

(c) Euler's theorem

(d) Fermat's Little theorem

যদি p এটা মৌলিক সংখ্যা হয়, তেতিয়া $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ — এইটো তলৰ কোনটো উপপাদ্য হব?

(a) Dirichlet ৰ উপপাদ্য

(b) Wilson ৰ উপপাদ্য

(c) Euler ৰ উপপাদ্য

(d) Fermat ৰ Little উপপাদ্য

(viii) "Let p be a prime and p does not divide a, then $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$" is a statement of

(a) Dirichlet's theorem

(b) Euclid's theorem

(c) Fermat's Little theorem

(d) Wilson's theorem

"ধৰা হ'ল p এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু p, a ৰ বিভাজ্য নহয়, তেতিয়াহলে $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$" এইটো তলৰ কোনটো উপপাদ্যৰ?

(a) Dirichlet ৰ উপপাদ্য

(b) Euclid ৰ উপপাদ্য

(c) Fermat ৰ Little উপপাদ্য

(d) Wilson ৰ উপপাদ্য

(ix) The unit place digit of 3^{46} is

3^{46} ৰ একক স্থানৰ অংকটো হ'ব

(a) 3

(b) 7

(c) 1

(d) 9

(x) The highest power of 7 that divides 50! is

50! ৰে বিভাজ্য 7 ৰ সৰ্বোচ্চ ঘাতটো হ'ব

(a) 7

(b) 8

(c) 10

(d) 5

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Apply Chinese remainder theorem to solve

চাইনীজ ভাগশেষ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$
$$x \equiv 5 \pmod{7}$$

(b) Find $\phi(100)$.

$\phi(100)$ ৰ মান উলিওৱা।

(c) Prove that $\tau(m)$ is multiplicative, i.e., $\tau(m \cdot n) = \tau(m)\tau(n)$.

প্ৰমাণ কৰা যে, $\tau(m)$ পূৰণৰ যোগ্য অৰ্থাৎ $\tau(m \cdot n) = \tau(m)\tau(n)$।

(d) Find $\sigma(12)$.

$\sigma(12)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Let x and y be any real numbers, prove that $[x]+[y] \leq [x+y]$ (where $[x]$ denotes greatest integer $\leq x$)

ধৰা হ'ল x আৰু y দুটা যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা। প্ৰমাণ কৰা যে, $[x]+[y] \leq [x+y]$ (য'ত $[x]$ এটা সৰ্বোচ্চ অখণ্ড সংখ্যা $\leq x$)

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Find the remainder when 30^{40} is divided by 17.

30^{40} ক 17 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) If $d = gcd(a, n)$ prove that the linear congruence $ax \equiv b \pmod{n}$ has a solution if and only if $d \mid b$.

যদি $d = gcd(a, n)$, প্ৰমাণ কৰা যে $ax \equiv b \pmod{n}$ ৰৈখিক congruence ৰ এটা সমাধান থাকিব যদি আৰু একমাত্ৰ যদিহে $d \mid b$।

(c) If p is prime and $k > 0$, then prove that

যদি p এটা মৌলিক সংখ্যা হয় আৰু $k > 0$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\phi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Verify this result for $\phi(16)$.

$\phi(16)$ ৰ বাবে ফলটোৰ সত্যাপন কৰা।

(d) For $n = p^k$, p is a prime, prove that $n = \sum_{d|n} \phi(n)$, where $\sum_{d|n}$ denotes the sum over all positive divisors of n.

$n = p^k$, য'ত p এটা মৌলিক সংখ্যা, ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে, $n = \sum_{d|n} \phi(n)$ য'ত $\sum_{d|n}$ য়ে n ৰ ধনাত্মক বিভাজ্যসমূহৰ যোগফল নিৰ্দেশ কৰে।

(e) Prove that no integer of the form $4n+3$ is the sum of two squares.

প্ৰমাণ কৰা যে, $4n+3$ আকাৰৰ দুটা বৰ্গৰ যোগফলৰ কোনো অখণ্ড সংখ্যা পাব নোৱাৰি।

(f) Show that an integer $p > 1$ is a prime if p divides $a.b$ implies either p divides a or p divides b.

দেখুওৱা যে, এটা অখণ্ড সংখ্যা $p > 1$ এটা মৌলিক হ'ব যদিহে $a.b$, p ৰে বিভাজ্যই বুজায় — হয় a, p ৰে বিভাজ্য অথবা b, p ৰে বিভাজ্য।

PART–B

*Answer **any four** from the following questions:* 10×4=40

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

4. (a) Show that, the set of integers $\{1, 5, 7, 11\}$ is a RRS (reduced residue system) modulo 12. 5

দেখুওৱা যে, $\{1, 5, 7, 11\}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো এটা modulo 12 ৰ RRS।

(b) If a, b, c be integers such that $ac \equiv bc \,(mod\, m)$ and $d \equiv gcd\,(c, m)$, then prove that $a \equiv b\left(mod\, \frac{m}{d}\right)$. 5

যদি a, b, c অখণ্ড সংখ্যা হয়, যাতে $ac \equiv bc \,(mod\, m)$ আৰু $d \equiv gcd\,(c, m)$ তেতিয়াহলে, প্ৰমাণ কৰা যে $a \equiv b\left(mod\, \frac{m}{d}\right)$.

5. (a) If p is a prime, then prove that
যদি p এটা মৌলিক, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\phi(p!) = (p-1)\,\phi((p-1)!) \qquad 5$$

(b) Prove that $5n+3$ and $7n+4$ are co-prime to each other for any natural number n. 5
প্ৰমাণ কৰা যে যিকোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা n ৰ বাবে $5n+3$ আৰু $7n+4$ সংখ্যা দুটা এটা আনটোৰ সহ-মৌলিক হ'ব।

6. (a) If p is a prime, then prove that $(p-1)! \equiv -1\,(mod\ p)$. 5
যদি p এটা মৌলিক হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $(p-1)! \equiv -1\,(mod\ p)$.

(b) Solve the following simultaneous congruence : 5

$$x \equiv 3\,(mod\, 11)$$
$$x \equiv 5\,(mod\, 19)$$
$$x \equiv 10\,(mod\, 29)$$

তলৰ সহ congruence কেইটা সমাধান কৰা ঃ

$$x \equiv 3 \pmod{11}$$
$$x \equiv 5 \pmod{19}$$
$$x \equiv 10 \pmod{29}$$

7. (a) Using property of congruence, show that, 41 divides $2^{20}-1$. 5

Congruence ৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে $2^{20}-1$, 41 ৰে বিভাজ্য।

(b) Prove that any positive integer $n \, (n > 1)$ can be expressed uniquely as a product of primes. 5

প্ৰমাণ কৰা যে যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $n \, (n > 1)$ ক মৌলিক সংখ্যাৰ পূৰণফল হিচাপে একক ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

8. (a) If n is any integer can be expressed as $n = p_1^{\alpha 1} . p_2^{\alpha 2} \ldots\ldots p_k^{\alpha k}$, then prove that

$$\phi(n) = n \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$ 5

যদি যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা n ক,

$n = p_1^{\alpha 1} . p_2^{\alpha 2} \ldots\ldots p_k^{\alpha k}$ ৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি,

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, $\phi(n) = n \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$

(b) If m and n are any two integers such that $(m, n) = 1$, prove that

$$\phi(m, n) = \phi(m).\phi(n)$$ 5

যদি m আৰু n দুটা অখণ্ড সংখ্যা হয় যাতে $(m, n) = 1$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\phi(m, n) = \phi(m).\phi(n)$$

9. (a) If $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2} \ldots\ldots p_r^{k_r}$ is the prime factorization of $n > 1$, then prove that

যদি $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2} \ldots\ldots p_r^{k_r}$ এটা $n > 1$ ৰ মৌলিক উৎপাদক হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots\ldots (k_r + 1)$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \ldots\ldots \times \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

5

(b) Find the number of zeroes in the end of the product of first 100 natural numbers. 5

প্ৰথম 100 টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পূৰণফলৰ শেহত থকা শূন্যৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

10. (a) Define Mobiu's function. Also prove that

$$\mu(m \cdot n) = \mu(m) \cdot \mu(n)$$

Hence find $\mu(6)$. 5

মবিয়াৰ ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\mu(m \cdot n) = \mu(m) \cdot \mu(n)$$

ইয়াৰ পৰা $\mu(6)$ ৰ মান উলিওৱা।

(b) For each positive integer $n \geq 1$, show that

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad n = 1 \\ 0, & \text{if} \quad n > 1 \end{cases}$$ 5

প্ৰতিটো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $n \geq 1$ ৰ বাবে দেখুওৱা

যে $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{যদি } n = 1 \\ 0, & \text{যদি } n > 1 \end{cases}$

11. (a) Let $a,\ m > 0$ be integers such that $(a, m) = 1$, then prove that

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \,(mod\, m)$$ 5

যদিহে $a,\ m > 0$ অখণ্ড সংখ্যা হয় যʼত $(a, m) = 1$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \,(mod\, m)$$

(b) Solve (সমাধান কৰা) : 5

$$f(x) = x^2 + x + 7 \equiv 0 \,(mod\, 3)$$