Total No. of printed pages = 23

3 (Sem-1) MAT-HG/RC-1

2019

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

Paper : MAT–HG–1016/MAT-RC-1016

Full Marks – 80

Time – Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

ইংৰাজী অথবা অসমীয়াত উত্তৰ কৰিবা।

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়াঁ ঃ

(a) Find the value of cos 1740°.

cos 1740°ৰ মান উলিওঁৱা।

(b) Write the equation which shifted the graph of the equation $x^2 + y^2 = 25$ into 3 units up and 4 units left.

$x^2 + y^2 = 25$ সমীকৰণৰ লেখটোক 3 একক ওপৰলৈ আৰু 4 একক বাওঁফালে স্থানান্তৰ কৰা সমীকৰণটো উলিওঁৱা।

[Turn over

Scanned with CamScanner

(c) State whether the following statement is true or false :

"The domain of the function

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ is $(-\infty, \infty)$"

তলৰ উক্তিটো সচাঁ নে মিছা লিখা ঃ

"$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ $(-\infty, \infty)$"

(d) If $\lim_{x \to a} f(x) = 2$, then find the value of

$\lim_{x \to a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$.

$\lim_{x \to a} f(x) = 2$ হলে $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(e) If the function $f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & x \leq 1 \\ kx^2, & x > 1 \end{cases}$

is continuous everywhere then find the value of k.

$f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & x \leq 1 \\ kx^2, & x > 1 \end{cases}$ ফলনটো সদায়েই অবিচ্ছিন্ন হ'লে kৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

Scanned with CamScanner

(f) What is the nth derivative of x^{n-1}?

x^{n-1} ৰ nতম অবকলজটো কি ?

(g) Write the range of arc tan x.

arc tan xৰ পৰিসৰ লিখা।

(h) State Euler's theorem on homogeneous function.

সুষম ফলনৰ ইউলাৰৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখা।

(i) Write the Maclaurin series for e^x.

e^x ৰ মেক্‌লৰিন শ্ৰেণীটো লিখাঁ।

(j) State whether the following statement is true or false :

"If $f'(x)=g'(x),\ \forall x \in (a,b)$ then f − g is a constant function".

তলৰ উক্তিটো সচাঁ নে মিছা লিখা ঃ

"$f'(x)=g'(x),\ \forall x \in (a,b)$ হ'লে f − g এটা ধ্ৰুবক ৰাশি।"

Scanned with CamScanner

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়াঁ ঃ

(a) Draw the graph of $f(x)=\begin{cases} x & , 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} x & , 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ ফলনটোৰ লেখ আঁকা।

(b) Find the nth derivative of e^{ax}.

e^{ax} ৰ nতম অবকলজটো উলিওঁৱা।

(c) If $f'(x)=x(x-1)$, then on what interval the function f is decreasing ?

যদি $f'(x)=x(x-1)$ হয় তেন্তে কি অন্তৰালত f ফলনটো হ্ৰাসমান হব?

(d) Prove that $\text{arc } \sin x + \text{arc } \cos x = \frac{\pi}{2}$.

প্ৰমাণ কৰা যে $\text{arc } \sin x + \text{arc } \cos x = \frac{\pi}{2}$.

Scanned with CamScanner

(e) If $v = x^2 + y^2 + z^2$, then prove that

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial z} = 2v.$$

যদি $v = x^2 + y^2 + z^2$ হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial z} = 2v.$$

3. Answer any *four* questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়াঁ ঃ

(a) For any angle θ, measured in radians, prove that

$$-|\theta| \le \sin\theta \le |\theta| \text{ and } -|\theta| \le 1 - \cos\theta \le |\theta|$$

θ ৰেডিয়ান জোখৰ যিকোনো কোণৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে ঃ

$$-|\theta| \le \sin\theta \le |\theta| \text{ আৰু } -|\theta| \le 1 - \cos\theta \le |\theta|$$

(b) Prove by analytical method $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

বিশ্লেষণাত্মক পদ্ধতিৰে প্ৰমাণ কৰা যে $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Scanned with CamScanner

(c) State and prove Rolle's theorem.

ৰ'লৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

(d) If $y = e^{a\sin^{-1}x}$ then show that

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - \left(n^2+a^2\right)y_n = 0.$$

$y = e^{a\sin^{-1}x}$ হ'লে দেখুউৱা যে

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - \left(n^2+a^2\right)y_n = 0.$$

(e) If three resistors R_1, R_2 and R_3 are connected in parallel, the total resistance R is determined by the equation :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

(i) What is $\frac{\partial R}{\partial R_1}$?

(ii) Suppose that R_1, R_2 and R_3 are variable resistors. How fast is R changing with respect to R_1 when $R_1=100$ ohms, $R_2=200$ ohms and $R_3=300$ ohms ?

Scanned with CamScanner

সমান্তৰালভাবে সংযোজিত তিনিটা ৰোধ R_1, R_2 আৰু R_3ৰ লব্ধ বল R এ তলৰ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

(i) $\frac{\partial R}{\partial R_1}$ য়ে কি অৰ্থ প্ৰকাশ কৰে ?

(ii) যদি R_1, R_2 আৰু R_3 তিনিটা চলমান ৰোধ হয়, তেন্তে R_1 সাপেক্ষে Rৰ পৰিৱৰ্ত্তনৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা যেতিয়া R_1=100 ohms, R_2=200 ohms আৰু R_3=300 ohms.

(f) If $f(x,y)=\sqrt{y+1}+\log\left(x^2-y\right)$ find f(e, 0) and sketch the domain of f.

যদি $f(x,y)=\sqrt{y+1}+\log\left(x^2-y\right)$ তেন্তে f(e, 0)ৰ মান উলিওৱা। লগতে f ৰ আদিক্ষেত্ৰৰ নক্সা তৈয়াৰ কৰা।

4. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) :

(a) আৰু (b) বা (c) আৰু (d) অংশৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Prove that

$$\cos(A-B)=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B$$

Hence deduce that $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

5+1=6

Scanned with CamScanner

প্ৰমাণ কৰা যে,

$\cos(A-B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$. ইয়াৰ পৰা দেখুওৱা যে $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

(b) In the triangle ABC, $a = 2$ units, $b = 3$ units and $\angle C = 60^\circ$. Find the value of $\sin B$. 4

ABC ত্ৰিভুজত $a = 2$ একক, $b = 3$ একক আৰু $\angle C = 60^\circ$. $\sin B$ৰ মান উলিওঁৱা।

(c) Prove that $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$.

Hence find the value of $\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$

4+2=6

প্ৰমাণ কৰা যে $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$.

ইয়াৰ পৰা $\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Consider the function $f(x) = 2x^2+3x+4$. Find the function which : 4

(i) shifts the graph of f three units up.

(ii) shifts the graph of f one unit to the left.

Scanned with CamScanner

(iii) stretches the graph of f vertically by a factor 2.

(iv) compresses the graph of f horizontally by a factor 3.

$f(x) = 2x^2+3x+4$ হ'লে, তলৰ ফলন কেইটা নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) f ফলনটোৰ লেখটোক তিনি একক ওপৰলৈ স্থানান্তৰ কৰা।

(ii) f ফলনটোৰ লেখটোক এক একক বাওঁফালে স্থানান্তৰ কৰা।

(iii) f ফলনটোৰ লেখটোক দুই গুণ উলম্ব ভাবে প্ৰসাৰিত কৰা।

(iv) f ফলনটোৰ লেখটোক তিনি গুণ আনুভূমিক ভাৱে সংকুচিত কৰা।

5. Answer any *two* of the following : 5×2=10

যিকোনো দুটা অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Evalute any *two* : 2½+2½=5

যিকোনো দুটাৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^6+5}-x^3\right)$

(ii) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (1-\tan x)\sec 2x$

Scanned with CamScanner

(iii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$

(iv) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\operatorname{cosec} x}$

(b) If the function f is continuous everywhere, then find the values of the constants k and m. 5

$$f(x) = \begin{cases} x^2+5 & , x > 2 \\ m(x+1)+k & , -1 < x \le 2 \\ 2x^3+x+7 & , x \le -1 \end{cases}$$

f ফলনটো সদায়েই অবিচ্ছিন্ন হ'লে k আৰু mৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2+5 & , x > 2 \\ m(x+1)+k & , -1 < x \le 2 \\ 2x^3+x+7 & , x \le -1 \end{cases}$$

(c) Prove that $\lim_{x \to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e$. 5

প্ৰমাণ কৰা যে $\lim_{x \to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Scanned with CamScanner

6. Sketch the level surfaces of 5+5=10

তলৰ ফলন কেইটাৰ পৃষ্ঠস্তৰ অংকন কৰা ঃ

(i) $f(x,y)=x^2-y^2$

(ii) $f(x,y)=xy$.

Or/অথবা

(a) State and prove Leibnitz theorem. 5

লীবনিটজৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

(b) If $y=\tan^{-1}x$, then find y_n. 5

$y=\tan^{-1}x$ হ'লে y_nৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

7. If $u=\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}}$, then prove that

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\tan u}{12}\left(\frac{\tan^2 u+13}{12}\right)$$

10

Scanned with CamScanner

যদি $u = \operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\dfrac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}}$ চা তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{12}\left(\frac{\tan^2 u + 13}{12}\right)$$

Or/অথবা

State and prove the Mean value theorem. What is its physical interpretation? Verify Mean Value theorem for the function $f(x) = x^2 + 2x - 1$ in the interval [0, 1]. 1+4+2+3=10

মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমান কৰা। ইয়াৰ ভৌতিক অৰ্থ কি? $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ফলনটোৰ [0, 1] অন্তৰালত উপপাদ্যটোৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰাঁ।

Scanned with CamScanner